

# Domača naloga #6: Grafi

## Priprave na računalniške olimpijade 2018/19

Vid Kocijan  
vid.kocijan@cs.ox.ac.uk

### A. Reposts

Ljudje in delitve objave sestavljajo graf, v katerem je Polycarp koren. Hitro opazimo, da gre pravzaprav za drevo, naš cilj pa je najti oddaljenost najbolj oddaljenega vozlišča tega od korena. Ker gre za drevo, je vseeno, ali uporabimo preiskovanje v globino ali preiskovanje v širino. Z drugo opcijo je verjetno manj dela.

### B. Ring road

Kot povedo že navodila naloge, vse ceste tvorijo cikel. Hitro lahko opazimo, da bodo vedno dosegljiva vsa mesta samo takrat, ko bodo vse ceste obrnjene v smeri urinega kazalca, ali pa vse obrnjene v obratni smeri urinega kazalca. Naša naloga je najti orientacijo vsake ceste, kar najlažje naredimo s pregledom v globino. Nato lahko preprosto ocenimo, katera od orientacij je cenejša.

### C. Regular bridge

Recimo, da je povezava  $(1, 2)$  most. Osredotočimo se na to, kako bomo ustrezen graf zgradili na eni strani mostu, na drugo stran lahko namreč postavimo zgolj kopijo.

Najprej pokažimo, da za sod  $k$  ni rešitve. Oglejmo si graf na eni strani mostu  $(1, 2)$  (brez mostu). Vsa vozlišča imajo stopnjo  $k$ , razen vozlišča 1, ki ima stopnjo  $k - 1$ , saj mostu nismo šteli zraven. Vsota stopenj vseh vozlišč je torej liha, kar privede do protislovja, saj je po lemi o rokovanju vsota stopenj vseh vozlišč dvakratnik števila vseh povezav.

Naj bo  $k$  lih. Oglejmo si eno od možnih konstrukcij takega grafa (obstaja jih še več). V graf dodajmo vozlišča  $3 \dots k + 1$  in jih povežimo z vozliščem 1. Sedaj ima vozlišče 1 stopnjo  $k$ , vsa ostala vozlišča pa stopnjo 1.

V graf dodajmo vozlišča  $k + 2 \dots 2k$  in vsako izmed njih povežimo z vsakim izmed vozlišč  $3 \dots k + 1$ . Sedaj imajo vozlišča  $3 \dots k + 1$  stopnjo  $k$ , vozlišča  $k + 2 \dots 2k$  pa stopnjo  $k - 1$ . Ker je  $k$  lih, je vozlišč  $k + 2 \dots 2k$  ravno sodo mnogo. Povežemo jih po sledečem postopku:  $k + 2$  povežemo s  $k + 3$ ,  $k + 4$  z  $k + 5$ ,  $\dots$ ,  $2k - 1$  pa povežemo z  $2k$ .

Enak postopek, le z drugače oštevilčenimi vozlišči, ponovimo še na drugi strani mostu.