Domača naloga #12: Geometrija
Priprave na računalniške olimpijade 2018/19

Jure Slak
jure.slak@ijs.si

A. Meeting

Za dan pravokotnik moramo najti vse točke na robu, ki ne ležijo v nobenem izmed danih krogov. Ker je pravokotnik majhen (koordinate točk so manjše od 1000) in ker je krogov manj kot tisoč lahko testiramo vsako točko proti vsakemu krogu. Paziti je potrebno, da točk na vogalih ne štejemo dvakrat.

B. Polygons

Za vsako točko mnogokotnika B želimo preveriti, ali leži v A. Mnogokotnik A je konveksen, tako da lahko uporabimo enostavno preverjanje, ali točka leži v A, ki pa zahteva, da se vsakič sprehodimo čez vse stranice A. To bi dalo časovno zahtevnost $O(nm)$, kar je prepočasi.

Potrebujemo hitrejši način, da preverimo ali je neka točka p vsebovana v A. Izberimo eno izmed oglišč A in ga označimo z X. Tega lahko povežemo z ostalimi oglišči in tako dobimo pahljačo trikotnikov. Zanima nas, v katerem (če sploh) leži p. Tega se lahko lotimo z bisekcijo. Najprej preverimo ali p leži na levi ali desni strani sredinske diagonale, in se nato zožimo samo na primerno polovico. Postopek ponavljamo, dokler ne ostane le en trikotnik, za katerega pa enostavno preverimo, ali vsebuje p.

Drugače gledano, vsa oglišča A sortiramo po kotu glede na X in v tem urejenem seznamu z bisekcijo najdemo elementa Y in Z najbližje p. Nato samo še preverimo, če p leži v $\triangle XYZ$.

Ker mora biti B strogo vsebovan v A, moramo lego na robu A obravnavati kot neuspešno.

Vizualna razlaga je na voljo na `https://www.youtube.com/watch?v=8nNg2KlwyRY`.

Alternativna rešitev je, da preverimo, ali je konveksna ovojnica A in B skupaj enaka A. Če to drži, je B znotraj A, sicer pa ne. Tudi v tem primeru moramo paziti na točke na robu.

C. New Year Tree Decorations

Problem rešujemo po eno dekoracijo naenkrat.

Denimo, da imamo prejšnjo lomljenko s koordinatami (x_i, y_i). V prvem koraku je to kar x-os s koordinatami $(i, 0)$. Nato dobimo novo lomljenko s koordinatami (i, z_i) in želimo izračunati ploščino, ki jo z_i oriše nad y_i. Pomaga, da sta lomljenki nad enakimi x koordinatami, kar v prvem koraku drži, kasneje pa bomo morali to vzdrževati, tako da lomljenko (i, z_i) razširimo z več točkami, tako da imamo v vsakem x_i znano vrednost z_i.

Sedaj ko imamo lomljenki nad enakimi intervali jih procesiramo od leve proti desni. Izračunati želimo ploščino med njima in novo "zgornjo" lomljenko, ki jo bomo uporabili pri naslednji iteraciji. Ta naj bo na začetku prazna. Na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ imamo štiri možnosti:

- $z_i \geq y_i$ in $z_{i+1} \geq z_{i+1}$: celotna nova krivulja leži nad staro. K celotni ploščini dodamo ploščino trapeza, novi zgornji krivulji pa dodamo par (x_i, z_i).
- $z_i \leq y_i$ in $z_{i+1} \leq z_{i+1}$: celotna nova krivulja leži pod staro. K celotni ploščini ne dodamo nič, novi zgornji krivulji pa dodamo par (x_i, y_i).
- $z_i > y_i$ in $z_{i+1} < y_{i+1}$: krivulji se sekata. K ploščini dodamo lev trikotnik (poznamo višino in osnovnico) in k novi zgornji krivulji dodamo (x_i, z_i) in koordinate presečišča.

- $z_i < y_i$ in $z_{i+1} > y_{i+1}$: krivulji se sekata. K ploščini dodamo desni trikotnik (poznamo višino in osnovnico) in k novi zgornji krivulji dodamo (x_i, y_i) in koordinate presečišča.

S tem dobimo dodano ploščino, ki jo izpišemo, in novo zgornjo krivuljo. Paziti moramo se, da so se nekatere točke lahko podvojile, tako da te pare umaknemo. Nato preberemo naslednjo lomljenko, jo razširimo na vse x koordinate in ponovimo postopek.

Na kratko torej postopek zgleda tako:

1. preberi novo lomljenko
2. razširi novo lomljenko na x koordinate trenutne lomljenke, da imata enake x koordinate
3. izračunaj dodano ploščino, novo zgornjo lomljenko in nove x koordinate (morda razširjene s presečišči)