Domača naloga #13: dinamično programiranje 3
Priprave na računalniške olimpijade 2018/19

Tomaž Hočevar
tomaz.hocevar@fri.uni-lj.si

A. Pie Rules

Podproblem oz. stanje igre lahko opišemo s številom preostalih kosov pite. Kdo je na vrsti, ni pomembno. Rešitev podproblema $f(n)$ bo predstavljala največjo vsoto, ki jo lahko ob optimalni igri obeh igralcev s pitami od n-te naprej doseže tisti, ki je prvi na potezi oz. drži žeton. Nasprotnik bo dosegel vsoto $s(n) - f(n)$, kjer je $s(n)$ vsota pit od n do konca seznama. Igralec lahko prepusti prvo število nasprotniku in ostane na potezi, ali pa vzame število, vendar je nato na potezi nasprotnik. Vrednosti $s(n)$ in $f(n)$ lahko izračunamo v $O(n)$ od večjih proti manjšim n-jem.

$$f(n) = \max\big(f(n+1), \quad x_n + (s(n+1) - f(n+1))\big)$$

B. Porcelain

Naj bo $f(n,m)$ največja vrednost, ki jo lahko dosežemo z razbijanjem m krožnikov na prvih n policah. Če vemo, da je na zadnji polici optimalno razbiti k krožnikov, dobimo podproblem $f(n-1, m-k)$. Ker tega ne vemo, preverimo vse možne vrednosti k.

$$f(n-1, m-k) = \max_k \big(f(n-1, m-k) + g(n,k)\big)$$

Ostane nam problem $g(n,k)$, kako razbiti k krožnikov na n-ti polici, da bo njihova vrednost čim večja. Rešitve tega problem lahko izračunamo vnaprej s preverjanjem vseh možnih levih in desnih indeksov krožnikov, ki bi ostali na polici.

C. Looking for Order

Prav nam bodo prišli kvadrati razdalj med vsemi pari predmetov, $d(x,y)$, in razdalje do torbice, $d(x)$. Podproblem lahko predstavimo z množico predmetov, ki jih je še treba pobrati. Vrstni red pobiranja ni važen, zato lahko vedno obravnavamo kar prvi nepobrani element, x_1. Pobrali ga bomo samega ali pa v paru še z nekim drugim elementom, x_i.

$$f(X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}) = \min\big(f(X - x_1) + 2d(x_1), \quad \min_i(f(X - x_1 - x_i) + d(x_1) + d(x_1, x_i) + d(x_i))\big)$$

Podmnožice predmetov učinkovito predstavimo z bitnimi maskami oz. s celimi števili od 0 do $2^n - 1$. Poleg minimuma si moramo shraniti tudi možnost, pri kateri je bil ta minimum dosežen, da lahko na koncu rekonstruiramo rešitev.