Algoritmi in podatkovne strukture – 2

Slovar

preskočni seznami

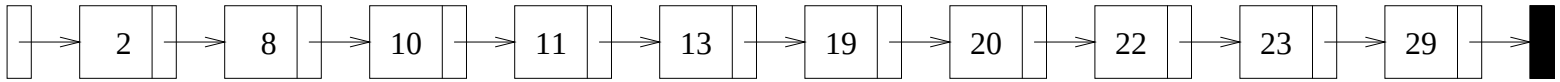
Seznami

Najpreprostejša oblika izvedbe slovarja je seznam, oziroma urejen seznam:

$$(2, 8, 10, 11, 13, 19, 20, 22, 23, 29)$$

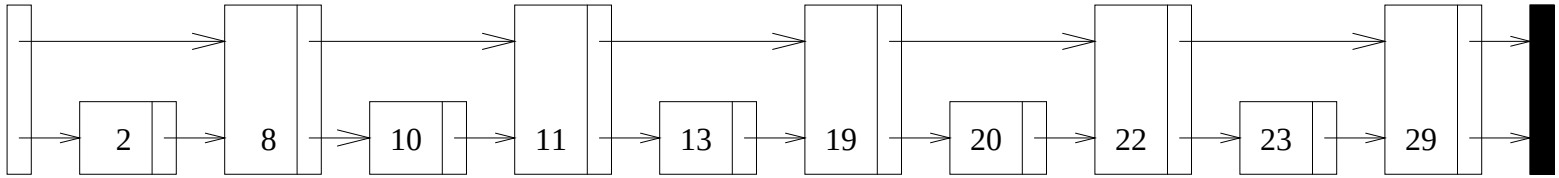
Čas iskanja je sorazmeren dolžini seznama, oziroma, v najslabšem primeru moramo narediti n primerjav.

Zaradi poenostavitve prikaza, lahko seznam narišemu tudi takole:



Seznami – 2

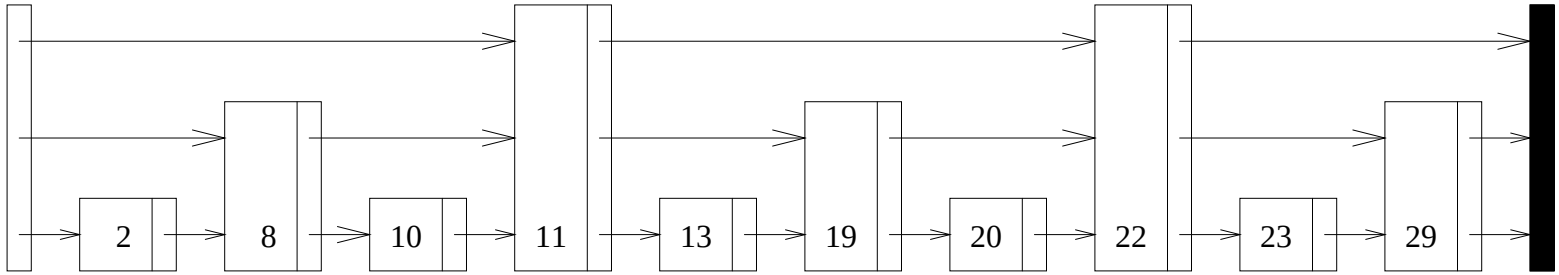
Iskanje lahko še enkrat pospešimo, če vsak drug element vsebuje referenco na element, ki je v seznamu dve mesti naprej:



V tem primeru naredimo samo še največ $\lceil n/2 \rceil + 1$ primerjavo.

Seznami – 4

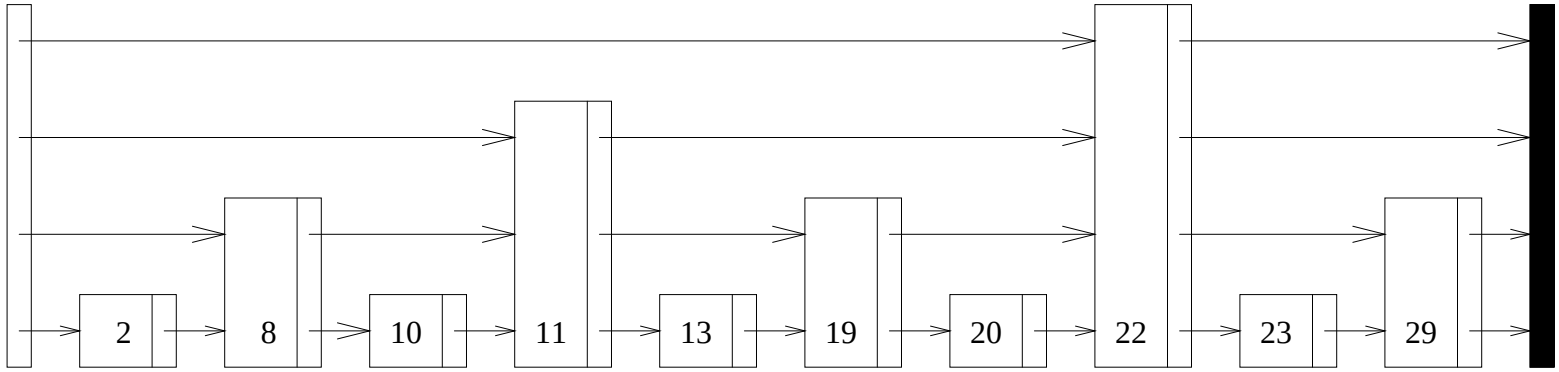
Zgodba se nadaljuje – iskanje lahko še enkrat pospešimo, če vsak četrti element vsebuje referenco na element, ki je v seznamu štiri mesta naprej:



V tem primeru naredimo samo še največ $\lceil n/4 \rceil + 2$ primerjavo.

Seznami – k

V splošnem lahko element vsebuje referenco na podseznam (element), ki je $k = 2^i$ mest naprej. Koliko je lahko največ i?



Največ $i = \lg n$ in v tem primeru naredimo največ

$$\left\lceil n/(2^i) \right\rceil + i = O(\log n)$$

primerjavo. Iskanje je učinkovito!

Preskočni seznami

DEFINICIJA: Element nivoja l vsebuje l referenc, ki jih označimo z $i \leq k$.

Kaj pa vstavljanje? Struktura je zelo stroga, saj je bi vstavljanje elementa na določeno mesto (eno mesto pred polovico v seznamu dolžine $n = 2^m$) povzročilo tudi $O(n)$ sprememb. Kako?

V resnici si želimo:

pogostnost: imeti približno $n/2^l$ elementov nivoja l, kjer $l \leq \lceil \lg n \rceil$; in
porazdeljenost: da so elementi nivoja l enakomerno porazdeljena po seznamu.

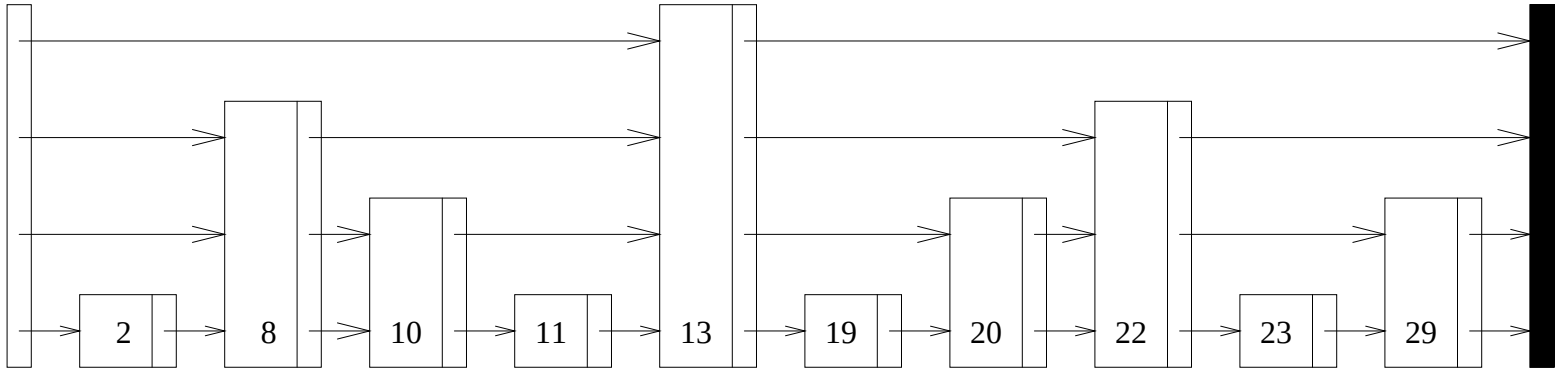
Velja torej:

INVARIANCA: Pri elementu nivoja l je referenca $i \leq l$ referenca na element, ki ima vsaj i nivojev.

POSLEDICA: Za element nivoja l obstaja natančno en element za vsak $i \leq l$, ki ima referenco nivoja i nanj (lahko je glava celotnega preskočnega seznama).

Ali ima lahko isti element reference različnih nivojev na nek element?

Preskočni seznam – osnutek razreda




```
public class SkipList {
  Elt head;          // pri glavi preskočnega seznama je glava prazna
  int level;
  SkipList[] tail;   // teh je level
  ...
}
```

Iskanje

Ostaja nespremenjeno:

```
public Elt Find(int key, int atLevel)  {
  if (head.key == key) return head;
  while ((atLevel > 0) && (tail[atLevel].Key > key))
    atLevel--;
  if (atLevel < 0) return NULL;
  return tail[atLevel].Find(key, atLevel);
}
```

Kako izgleda nerekurzivna metoda?

Kaj pa časovna zahtevnost? Odvisna je od pogostnosti in porazdeljenosti nivojev med elementi. Če so nivoji približno enako pogosti in enakomerno porazdeljeni, potem je $O(\log n)$.

Vstavljanje

Očitno moramo najprej najti pravo mesto v seznamu, kamor bomo vstavili novi element. In potem?

Na katerem nivoju naj bo vstavljeni element? Ohraniti moramo invarianco in obe lastnosti (pogostnost in porazdeljenost). Kako?

- Kakšni so bili rezultati pri domači nalogi, pri vstavljanju v navadno iskalno drevo?
- Kaj se je zgodilo, ko so bili podatki urejeni?
- Kaj se je zgodilo, ko so bili podatki naključni?

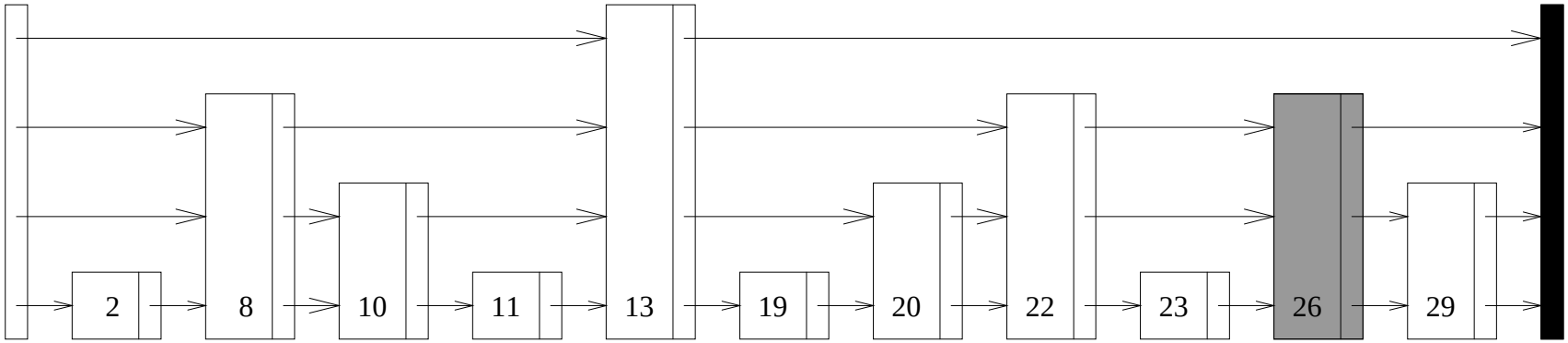
Na pomoč nam priskoči naključnost – v povprečju je naključno življenje znosno v redu.

Vstavljanje – ideja

- Ko vstavimo nov element v seznam se odločimo za njegovo višino nekako naključno: verjetnost, da bo nivoja 1 naj bo $1/2$, da bo nivoja 2 naj bo $1/4$ in da bo nivoja l naj bo $1/2^l$.
- To dosežemo tako, da mečemo kovanec toliko časa, da pade cifra ter število metov pomeni nivo elementa.

Vstavljanje – primer

V preskočni seznam s prosojnice 7 vstavimo element 26. Recimo, da vržemo tretjič cifro. Potem dobimo nov preskočni seznam:



Vstavljanje – ideja metode

Kako zagotoviti še (strukturno) invarianco?

Pri postopku vstavljanja, ko iščemo mesto, kamor bomo vstavili novi element, si vsakič, ko se spustimo za nivo, zapomnimo element, pri katerem smo se spustili.

POZOR: ko vstavljamo element, se vedno spustimo do nivoja 1 (glej metodo za iskanje).

Če je vstavljeni element nivoja l, potem vsi predhodniki do nivoja l morajo imeti referenco nanj.

Vstavljanje – ideja metode

```
public void SLInsert(int key, int atLevel, SkipList[] refsOn)  {
  if (head.key == key) return;  // že vstavljen
  while ((atLevel > 0) && (tail[atLevel].Key > key)) {
    refsOn[atLevel]= this;
    atLevel--;
  }
  if (atLevel < 0) ...;      // tukaj vstavimo
  tail[atLevel].SLInsert(key, atLevel, refsOn);
}
```

Časovna zahtevnost je:

- za to, da najdemo mesto, kamor se vstavi element $O(\log n)$ (glej razlago pri iskanju) in
- za smo vstavljanje tudi $O(\log n)$, saj popravljamo največ dva krat toliko referenc.

Skupno je časovna zahtevnost vstavljanja $O(\log n)$.

Kaj pa prostorska?

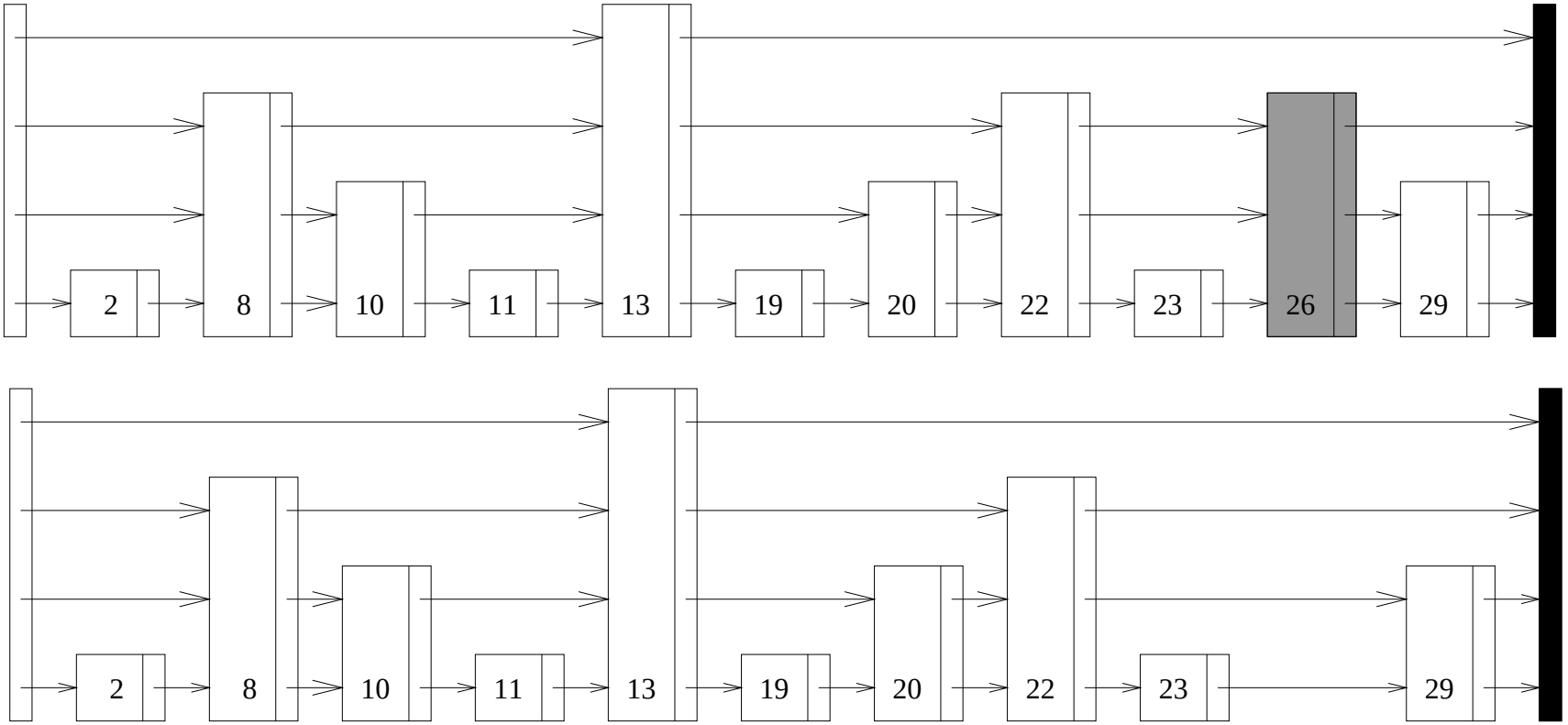
Iskanje – ponovno

Kaj pa se zgodi sedaj s časovno zahtevnostjo iskanja? Porazdeljenost in pogostnost nivojev elementov se lahko poruši.

Če je kovanec pravičen, potem se obe lastnosti ohranjata in tedaj je *pričakovana* vrednost časovna zahtevnost iskanja (ter tudi posledično vstavljanja) za katerikoli nabor elementov $O(\log n)$.

Seveda, najslabša vrednost je še vedno $O(n)$. Kdaj nastopi? Dva preprosta (trivialna) primera. Ali je odvisna od elementov, ki jih vstavljamo? Razmislite in/ali poskusite.

Brisanje – primer



Brisanje – ideja metode

Podobno kot pri vstavljanju – zagotoviti moramo strukturno invarianco:

> Pri postopku brisanja, ko iščemo element, ki ga bomo izbrisali, si vsakič, ko se spustimo za nivo, zapomnimo element, pri katerem smo se spustili.

RAZLIKA: Lahko ga najdemo, predno pridemo do nivoja 1.

Kaj pa sedaj pričakovana časovna zahtevnost?

Kakšna pa je prostorska zahtevnost?

Zapletenost

	`Find`	`Insert`	`Delete`
seznam	$O(n)$	$O(1)$	$O(n)$
urejen seznam	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
binarno drevo	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
AVL drevo	$O(\lg n)$	$O(\lg n)$	$O(\lg n)$
B drevo	$O(\log_b n)$	$O(\log_b n)$	$O(\log_b n)$
RB-drevo	$O(\lg n)$	$O(\lg n)$	$O(\lg n)$
preskočna vrsta	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$

- Kakšen je čas pri preskočni vrsti: največji, najmanjši, povprečni, pričakovan?
- Dâ se narediti največji (Munro, Papadakis).
- Lahko naključnost uporabimo pri drevesih? Kaj bi se poenostavilo?