printf, scanf
matematika
if stavki
zanke
stringi / nizi
seznami
funkcije
↳ rekurzija

Sintaksa

Algoritmično razmišljanje

1. TEORIJA ŠTEVIL

- Evklidov algoritem
- Eratostenovo rešeto

1.1. Največji skupni delitelj

60, 84

Največji skupni delitelj?

$D(60, 84) = 12$

NSD je največje število, ki deli dve števili

12 deli 60, 12 deli 84

(60 je deljivo z 12)

$60 = 12 \cdot 5$ $84 = 12 \cdot 7$

3 7 9 6 5 8 2 9 3 6 6

Evklidov algoritem ⇝ izračuna NSD

angl. GCD
(greatest common divisor)

deljenec ↓ — delitelj ↓ — količnik ↓ — ostanek ↓

$$84 = 60 \cdot 1 + 24$$

60:24 = $\quad 60 = 24 \cdot 2 + 12$

24:12 = $\quad 24 = 12 \cdot 2 + \boxed{0}$

$$12 = 0 \cdot \cancel{}$$

z 0 ne smemo deliti!

$$379658 = 29366 \cdot 12 + 27266$$
$$29366 = 27266 \cdot 1 + 2100$$
$$27266 = 2100 \cdot 12 + 2066$$
$$2100 = 2066 \cdot 1 + 34$$
$$2066 = 34 \cdot 60 + 26$$
$$34 = 26 \cdot 1 + 8$$
$$26 = 8 \cdot 3 + 2$$
$$8 = \boxed{2} \cdot 4 + \boxed{0}$$

Evklidov algoritem je zelo hiter

Algoritem so navodila, kako nekaj izračunati.

Cilj: napišemo Euklidov algoritem z besedami in ga implementiramo

↳ napišemo v C++

DN Izmisli si dve števili > 1000000 in izračunaj njun NSD

Potem: iskanje praštevil ⇝ drug algoritem

$$D(123456789, 987654321)$$

$$987654321 = 123456789 \cdot 8 + 9$$

$$123456789 = 9 \cdot 13717421 + 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} a & & b & & & & c \\ 7182 & = & 5022 & \cdot & 1 & + & 2160 \\ 5022 & = & 2160 & \cdot & 2 & + & 702 \\ 2160 & = & 702 & \cdot & 3 & + & 54 \\ 702 & = & 54 & \cdot & 13 & + & 0 \end{array}$$

D!

V koraku:

- Izračunaj količnik in ostanek pri deljenju a z b
- nov a = star b
- nov b = star c
- nov c = ostanek pri deljenju
- ponavljamo

V zanki ponavljamo sledeče:

Izračunamo ostanek pri deljenju a z b

Označimo ga z c

nov a = star b

nov b = c

Zanko zaključimo, ko je $c=0$

Odgovor (NSD) je b.

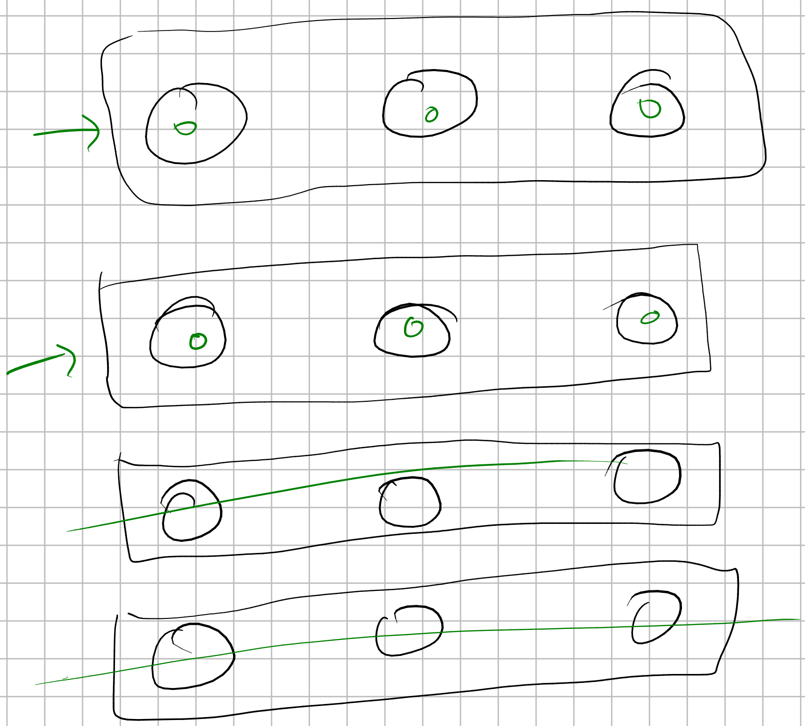
Če je $a<b$, potem je

$$a \% b = a$$

$$a = 0 \cdot b + a$$

$$a = b \cdot 0 + a$$

$$\rightarrow b = a \cdot \_ + \_\_$$



6 povabljenih

3 kolački v paketu

⇝ koliko paketov moramo kupiti? x3

→ koliko kolačkov?

10 ljudi, 3 kolački na paket.

→ ? 10 paketov, 30 kolačkov

Rešitev: najmanjši skupni večkratnik

$v(a,b)$ = najmanjše število, ki ga tako a kot b delita

Evklidov algoritem: $D(a,b)$

$$\boxed{v(a,b) \cdot D(a,b) = a \cdot b}$$

$$v(a,b) = \frac{a \cdot b}{D(a,b)}$$

↓

LCM (lowest common multiple)

$$10^{18} \cdot 10^{18} = 10^{36}$$

$\uparrow$ LL $\quad \uparrow$ LL $\quad \cancel{\uparrow}$ LL

$$D(a,b,c) = D(D(a,b), c)$$

– če nas zanima $D(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$,

izračunamo

$b_1 = D(a_1, a_2)$

$b_2 = D(b_1, a_3)$

$b_3 = D(b_2, a_4)$

...

$b_{n-1} = D(b_{n-2}, a_n)$

⇝ b_{n-1} je odgovor

Enako za LCM

1.2. Iskanje praštevil

Število p je praštevilo, če je deljivo samo z 1 in s p.

⇝ 2, 3, 5, 7, 11, 13...

Kako jih najdemo?

Vprašanje: Ali je dano število praštevilo?

– algoritem: preveri vsa števila, ki bi lahko bila delitelj do $\sqrt{N}$ tega števila, če dejansko so delitelji

Naše vprašanje: poišči vsa praštevila $\leq N$

> Osnovni izrek teorije števil:
> Vsako število se da enolično zapisati kot produkt praštevil.

2 3 ~~4~~$_2$ 5 ~~6~~$_3$ 7 ~~8~~$_2$ ~~9~~$_3$ ~~10~~$_5$

11 ~~12~~$_3$ 13 ~~14~~$_7$ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~

~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~ ~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~

31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~ 37 ~~38~~ ~~39~~ ~~40~~

Eratostenovo rešeto

Pripravimo si tabelo vseh števil

Sprehajamo se skozi tabelo

– ko pridemo do neprečrtanega števila, vemo, da je to praštevilo

– vse njegove večkratnike do $\sqrt{N}$ prečrtamo

Zakaj samo do $\sqrt{N}$???

Recimo, da ima N delitelj m

$\Rightarrow N = m \cdot k$ $\quad k, m$ naravni števili

1. recimo $m < k$:

$$m < \sqrt{N}$$

če $m > \sqrt{N}$, $\quad k > m > \sqrt{N} \Rightarrow m \cdot k = N$

nikoli ni res!

$$\vee$$

$$\sqrt{N} \cdot \sqrt{N} = N$$

$$\Rightarrow N > N$$

narobe!

2. če je $k < m$: $\quad k < \sqrt{N}$

3. če $k = m \Rightarrow k = m = \sqrt{N}$

$$k \cdot m = m \cdot m = N$$

Zaključek: Vsaj eden od deliteljev je manjši od korena.

Razcep števila 963:

$$963 = 3 \cdot 321$$

$$321 = 3 \cdot 107$$

$$\Rightarrow 963 = 3 \cdot 3 \cdot 107$$