Uvod v računsko geometrijo

Jure Slak

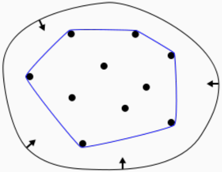
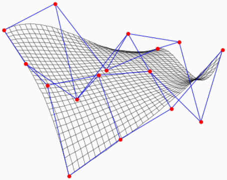
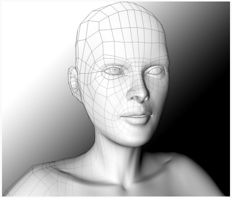
Institut "Jožef Stefan", odsek E6, laboratorij za vzporedno in porazdeljeno računanje
Fakulteta za matematiko in fiziko, oddelek za matematiko

29. 3. 2021, Priprave na računalniške olimpijade, 11. srečanje

Uvod

Računska geometrija je veja računalništva, ki se ukvarja z geometrijskimi problemi. Deli se na dva glavna kosa:

- Kombinatorična RG: ukvarja se s točkami, premicami, liki in algoritmi za delo z njimi
- Numerična RG: ukvarja z modeliranjem in dizajnom (krivulje, ploskve)

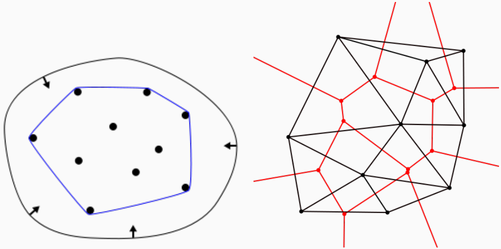
vir slik: Wikipedia

Kombinatorična RG

Lahko za ljudi, težko za računalnike: že enostavni problemi so lahko precej tečni

Nekaj problemov:

- Presečišče dveh objektov (krogov, premic, daljic)
- Ali točka leži v mnogokotniku?
- Konveksna ovojnica točk
- Konstrukcija triangulacij



Osnovni objekti

Kako predstavimo objekte: (če se le da, se izogibamo decimalkam)

Osnovni objekti

Kako predstavimo objekte: (če se le da, se izogibamo decimalkam)

- Točka: par (x, y), `struct point_t { int x, y; };`
- Vektor: par (x, y)
- Smer: enotski vector (c, s), **REDKO:** kot φ
- Daljica: par točk
- Trikotnik: tri točke, ponavadi v pozitivni smeri
- Mnogokotnik: seznam točk, ponavadi v pozitivni smeri
- Premica: trojica (a, b, c), ki predstavlja $ax + by = c$.
  Enoličnost? **NE:** $y = kx + n$ ali $\frac{y}{n} + \frac{x}{m} = 1$
- Krog: točka + radij
- Pravokotnik (poravnan z osmi): $((x_{min}, y_{min}), (x_{max}, y_{max}))$.

Osnovni objekti

Kako predstavimo objekte: (če se le da, se izogibamo decimalkam)

- Točka: par (x, y), `struct point_t { int x, y; };`
- Vektor: par (x, y)
- Smer: enotski vector (c, s), **REDKO:** kot φ
- Daljica: par točk
- Trikotnik: tri točke, ponavadi v pozitivni smeri
- Mnogokotnik: seznam točk, ponavadi v pozitivni smeri
- Premica: trojica (a, b, c), ki predstavlja $ax + by = c$.
  Enoličnost? **NE:** $y = kx + n$ ali $\frac{y}{n} + \frac{x}{m} = 1$
- Krog: točka + radij
- Pravokotnik (poravnan z osmi): $((x_{min}, y_{min}), (x_{max}, y_{max}))$.

Problemi: primerjava točk gor/dol, levo/desno. Ali je točka v pravokotniku? Vektor med dvema točkama. Seštevanje vektorjev, množenje s številom.

Točke, vektorji, smeri in razdalje

Razdalja med točkama:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Pozor, razdalja je lahko tudi drugačna, npr. $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Problemi, ki jih znamo rešiti: obseg trikotnika, kvadrata, mnogokotnika, dolžina daljice, velikost vektorja, smer vektorja, ali je točka v krogu, ali se kroga sekata?

Pozor: pogosto pri razdalji ni treba računati korena, npr. ko razdalje primerjamo med seboj

Naklonski kot vektorja (x, y): **Ne izumljajte svoje formule!**

$$\varphi = \operatorname{atan2}(y, x) \in [-\pi, \pi]$$

Rezultat ni definiran za $x = y = 0$. Rezultat je v radianih!

Problemi: kot med vektorjema, kot med daljicama

Vektorji

Skalarni produkt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\varphi$

Pravokotnost: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Če je $\vec{a}$ enotski, je to projekcija $\vec{b}$ na $\vec{a}$.
Kako dobimo pravokotni vektor od (x, y): $(-y, x)$ ali $(y, -x)$.

Vektorski produkt: $\vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, a_1 b_2 - b_1 a_2) = (0, 0, \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin\varphi)$
Vzporednost: $(\vec{a} \times \vec{b})_3 = 0$.

Produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na $\vec{a}$ in $\vec{b}$ in ima dolžino enako ploščini paralelograma, ki ga definirata $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Njegova smer je odvisna od lege $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Ali je nek vektor na levo od drugega? **Ne izumljajte svoje formule!** Poglejte samo tretjo komponento $\vec{a} \times \vec{b}$.

Ali so tri točke kolinearne?

Ploščine

Pravokotnik: znamo

Mnogokotnik:

$$po = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1}) \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$$

Seštevamo trapeze, lahko tudi po y osi. Ne deluje za samo-sekajoče like.

Trikotnik:

Heronov obrazec: $p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$

ali bolje

$$po = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})_3$$

Trikotniki, pravokotniki in krogi

Ali je točka v trikotniku? Pogledamo ploščine notranjih trikotnikov.

$$p(\triangle ABC) \stackrel{?}{=} p(\triangle ABT) + p(\triangle ACT) + p(\triangle BCT)$$

Znamo vse: konstrukcija, obseg, ploščina, vsebovanost, enakost, orientacija

Pravokotniki: obseg, ploščina, vsebovanost, enakost, konstrukcija
Presek: $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \cap [x_3, x_4] \times [y_3, y_4] =$
$([x_1, x_2] \cap [x_3, x_4]) \times ([y_1, y_2] \cap [y_3, y_4])$ Presek intervalov?

Krogi: obseg, ploščina, vsebovanost, enakost
Konstrukcija: tri točke? dve točki in radij?

Premice

Zakaj je $y = kx + n$ slaba oblika? Bolje:

$$ax + by = c.$$

Predstava: smer + točka.

Enoličnost: a, b, c tuji ali (a, b) enotski.

Premica s smerjo (s, t) skozi točko (p, q)?

$$(t, -s) \cdot ((x, y) - (p, q)) = 0$$

Premica skozi dve točki?

Presečišča premic

Presečišče dveh premic: kaj vse se lahko zgodi?

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Presečišča premic

Presečišče dveh premic: kaj vse se lahko zgodi?

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

Vzporedni, če (a_1, b_1) vzporeden (a_2, b_2). Pogledamo $d = a_1 b_2 - a_2 b_1$. Če $d = 0$, potem sta premici enaki, če

$$b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0, \quad a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0$$

Če $d \neq 0$, potem je presečišče

$$(x_0, y_0) = (b_2 c_1 - b_1 c_2, a_1 c_2 - a_2 c_1)/d$$

Razdalja do premice:

$$d((x_0, y_0), ax + by = c) \cdot o = \frac{a x_0 + b y_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{(a, b) \cdot (x_0, y_0) - c}{\|(a, b)\|}$$

Premica dana z dvema točkama

$$P_x = \frac{\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_3 & 1 \\ y_4 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}} \qquad P_y = \frac{\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_3 & 1 \\ y_4 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_3 & 1 \\ y_4 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}}$$

To si je težko zapomniti prav... V praksi naredite lepo postopoma.

Daljice

Možne lege: ...

Ali se sploh sekata?

```
int o1 = sign(cross(p1, p2, q1));  // daljico p1p2 sekamo z q1q2
int o2 = sign(cross(p1, p2, q2));
int o3 = sign(cross(q1, q2, p1));
int o4 = sign(cross(q1, q2, p2));

// za pravo presecisce morajo biti o1, o2, o3, o4 != 0
if (o1 != o2 && o3 != o4 && o1 != 0 && o2 != 0 && o3 != 0 && o4 != 0)
    return line_line_intersection(L(p1, p2), L(q1, q2));

// EQ = se dotika samo z ogliscem ali sta vzporedni
if (o1 == 0 && point_in_rect(q1, p1, p2)) return {EQ, q1};  // q1 lezi na p
if (o2 == 0 && point_in_rect(q2, p1, p2)) return {EQ, q2};  // q2 lezi na p
if (o3 == 0 && point_in_rect(p1, q1, q2)) return {EQ, p1};  // p1 lezi na q
if (o4 == 0 && point_in_rect(p2, q1, q2)) return {EQ, p2};  // p2 lezi na q

return {NO, P()};
```

Mnogokotniki

Mnogokotniki: obseg, ploščina, orientacija

Vsebovanost: poltrak v neskončnost, štejemo presečišča

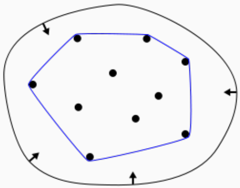
Ali je konveksen? Če je, gremo vedno na levo.

Ali je točka v konveksnem mnogokotniku: Ali je vedno na levi?

Konstrukcije?

Konveksna ovojnica

Imamo n točk, najdi najmanjši mnogokotnik, ki vsebuje vse.

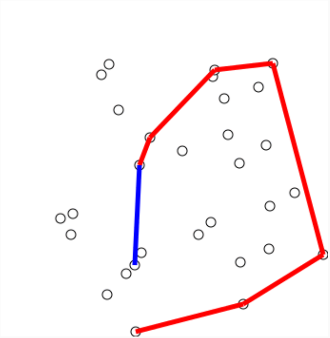


Kako sploh? Kako bi to naredili hitro?
Veliko $O(n \log n)$ algoritmov.

Najenostavnejši: Gift wrapping: najdemo najbolj levo točko, najbolj levo daljico, se premaknemo na naslednjo točko in ponavljamo. Zahtevnost $O(nh)$.

Graham scan

Graham scan:
Začnemo levo spodaj, uredimo točke po naklonu (kako?), stack s trenutno ovojnico. Pri novi dodani točki preverimo, ali smo šli v desno ali v levo; če smo šli v desno, odstranimo staro točko in ponovimo. Zahtevnost $O(n \log n)$.



Naloge

Naloge:

- UVa 1373 – krogi in točke
- UVa 2432 – trikotniki
- UVa 120 – premice/daljice
- UVa 11626 – convex hull